Ур-я идеальной несжим-ой жидкости. Инт-лы дв-я

1) $\rho = const$ (по пр-ву и по времени)

2) идеальная жидкость (вязкость отсутствует - нет трения, нет касательных напряжений)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{div\, v = 0}$$ Ур-е неразр-ти

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla) v + \frac{1}{\rho} grad\, p = 0$$ - ур-е дв-я

Неизв.: p, v_x, v_y, v_z $\Rightarrow$ замкн. система
4 ур-я

З-н сохр-я циркуляции (т. Томсона)

Интеграл $\Gamma = \oint (\vec{v}, d\vec{r})$ будем наз. циркуляцией ск-ти по замкнутому контуру.

контур „жидкий" (состоит из жидких частиц)

Расм. $$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint(\vec{v}, d\vec{r}) = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \underbrace{\oint \vec{v} \frac{d}{dt}(dr)}_{\frac{dr}{dt} = \vec{v}} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \oint \vec{v} d\vec{v} =$$

$$= \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \underbrace{\frac{1}{2}\oint d\frac{\vec{v}}{2}}_{=0} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \left\{\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\right\} =$$ (инт-ал по замкн. контуру от полного дифф-ла)

$$= \oint -\frac{1}{\rho}\nabla p\, d\vec{r} = -\frac{1}{\rho} dp = 0 \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = 0$$ Циркуляция по выделенному контуру („жидкому") вдоль траек-рии дв-я ч-ц сохр-ся.

Инт-л Бернулли

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \quad \rho = const$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v,\nabla)v + \nabla\frac{p}{\rho} = 0; \quad (*)$$

$$\operatorname{div} v = 0; \quad (v,\nabla) = \nabla\frac{v^2}{2} - v \times \operatorname{rot} v$$

1) Течение потенциально ($\operatorname{rot}\vec{v} = 0$, $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$) $\Rightarrow (v,\nabla)v = \nabla\frac{v^2}{2}$;

$$(*) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla\frac{v^2}{2} + \nabla\frac{p}{\rho} = 0;$$

$\nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = 0$, нет завис-ти от x, y, z

$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)$ - Инт-ал Бернулли

если теч-е стац-но, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const$$

2) Теч-е не потен-но

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}(v,\nabla p) = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho}(v,\nabla p) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

если теч-е стац-ное, то $\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const$ вдоль траек-ии дв-я.